23/10/17.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Πρόβλημα: Δοθείσης συνάρτησης f, να βρεθεί x^* τέτοιο ώστε $f(x^*)=0$ (x^* ρίζα της f)

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

Αναλυτικά:
Πολυωνυμικές εξισώσεις μέχρι και 4ου βαθμού ή ειδικές μορφές π.χ. εξισώσεων μεγαλύτερου βαθμού. ($x^\nu - a = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, $a > 0$)

Η $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$

Για την εύρεση της $\sqrt{2}$, χρησιμοποιούμε αριθμ. μέθοδο.

Οι αριθμητικές μέθοδοι συνίστανται στην εύρεση μιας ακολουθίας $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, αν συγκλίνει θα συγκλίνει στην ρίζα x^* της $f(x)=0$.

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

Μέθοδος διχοτόμησης (Bolzano): Έστω διάστημα $I=[a,b]$ και $f \in C(I)$ και $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Τότε θα υπάρχει ρίζα x^* της $f(x)=0$ στο I.

Αν $f(a)=0$ ή $f(b)=0$ τότε a ή b αντίστοιχα ρίζα της $f(x)=0$ στο I.

Αλλιώς, $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists$ ρίζα x^* της $f(x)=0$ στο I.

Θεωρούμε $c=\frac{a+b}{2}$, το μέσο του $[a,b]$.

α) Αν $f(c)=0$, τότε c είναι μια ρίζα.

β) Αν $f(c)\neq 0$, τότε:

β1) Αν $f(a)f(c)<0$, τότε $\exists$ ρίζα $x^*\in[a,c]$.

β2) Αν $f(a)\cdot f(c)>0$, $(f(c)f(b)<0)$, τότε $\exists$ ρίζα $x^*\in[c,b]$

Εντοπίζουμε το διάστημα $[a,c]$ ή $[c,b]$ που βρίσκεται η ρίζα.
Το νέο διάστημα το θεωρούμε ως $[a,b]$ και επαναλαμβάνουμε.
Συμβολίζουμε $I_1=[a_1,b_1]=[a,b]$:

$$x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$$

με $I_2=[a_2,b_2]$ το δεύτερο διάστημα:

$$x_2=\frac{a_2+b_2}{2}$$

$$\vdots$$

$$I_n=[a_n,b_n],\quad x_n=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

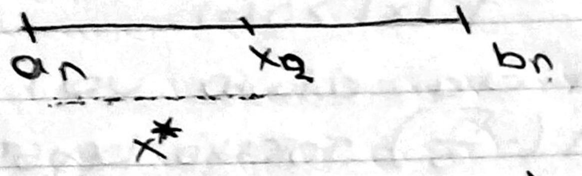
Πλεονεκτήματα

1) Είναι απλή στην εφαρμογή
2) Απαιτεί μόνο συνέχεια της f
3) Εκτελεί μόνο μία φορά την $f(x_i)$ στην i επανάληψη
4) Προσδιορίζουμε εκ των προτέρων τον αριθμό επαναλήψεων.

Εκτίμηση σφάλματος: $I_n = [a_n, b_n]$:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2})$$

$$= \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$



$$|x^* - x_n| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b_1 - a_1}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}$$

Έστω $ε > 0$, η το σφάλμα ανοχής.
$|x^* - x_n| \le ε$. Αυτό εξασφαλίζεται αν

$$\frac{b-a}{2^n} \le ε \iff \log\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \le \log(ε)$$

$$\iff \log(b-a) - \log 2^n \le \log ε$$

$$\iff n \log 2 \ge \log(b-a) - \log ε = \log\left(\frac{b-a}{ε}\right)$$

$$\iff n \ge \log\left(\frac{b-a}{ε}\right) / \log 2 = \left(\log\left(\frac{b-a}{ε}\right)\right)_2$$

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, έχει μόνο μια πραγματική ρίζα x^* που βρίσκεται στο $I = [1,2]$ με $[1,2] = [a,b]$, να υπολογίσετε την δεύτερη προσέγγιση της x^* με την μέθοδο της διχοτόμησης. Πόσα βήματα απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης που απέχει 10^{-6} το πολύ από την x^*;)

$(\Longrightarrow)$

Λύση

$f(1)=1-1$

$f(2) = 2^3-2-1=5>0.$

$f'(x) = 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow$

η f είναι αύξουσα και $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ τοπικό μέγιστο.

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$$

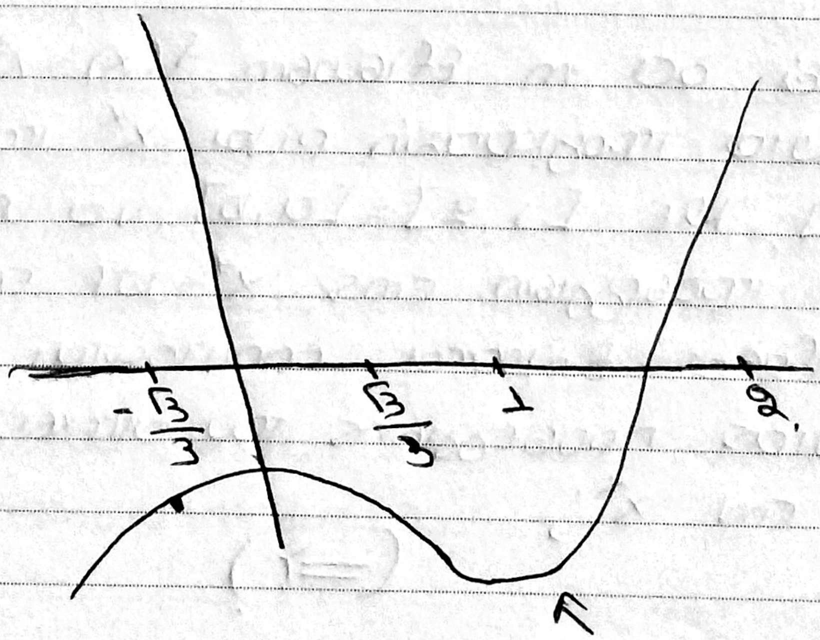
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0.$$

$x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f(x)<0$ άρα η f γν. φθίνουσα και $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ τοπικό ελάχιστο.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = -\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$$

$x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ και $f(x)>0 \Rightarrow$ η f γν. αύξουσα

$\Rightarrow$ Η ρίζα $x^* \in [1,2]$ είναι μοναδική.



Η γραφική παράσταση της διερεύνησης που κάναμε.

$I_1 = [a_1, b_1] = [1, 2]$, $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27-12-8}{8} = \frac{7}{8} > 0.$

$f(1) f(1.5) < 0 \Rightarrow I_2 = [a_2, b_2] = [1, 1.5].$

$$x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25.$$

~o~o~o

$n \geq \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) / \log 2 \simeq \log\left(\frac{1}{10^{-6}} / 0.301\right) =$

$= \log 10^6 / 0.301 = \frac{6}{0.301} \approx$

$\approx 19.9316.$

Άρα $n = 20.$